Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2010

2010/1. Definiálunk egy sorozatot, legyen $a_0 = 0$. Ha n legnagyobb páratlan osztójának 4-es maradéka 1, akkor $a_n = a_{n-1} + 1$, ha a maradék 3, akkor $a_n = a_{n-1} - 1$. A sorozat első néhány eleme : 0,1,2,1,2,3,...

Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész végtelen sokszor szerepel a sorozatban.

2010/2. A k körön kívül elhelyezkedő A pontból két szelőt húztunk a körhöz, egyik k-t B és C, a másik D és E pontokban metszi, $AD < AE$. Párhuzamost húzunk AC-vel D-n át, ez k-t F-ben metszi. Legyen AF és k metszéspontja G, az EG és AC egyenesek metszéspontja M. Igazoljuk az alábbi összefüggést:

$$\frac{1}{AM} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}.$$

2010/3. A $P(x)$ valós együtthatós polinomra létezik végtelen sok egészekből álló $(m; n)$ pár, amelyekre $P(m) + P(n) = 0$. Igazoljuk, hogy a polinom által meghatározott $y = P(x)$ függvény grafikonja középpontosan szimmetrikus.

2010/4. Keressük meg a legnagyobb valós m értéket, amelyre az alábbi egyenletrendszer tetszőleges x, y, z, u pozitív egész megoldása esetén $m \leq x/y$, ha $x \geq y$:

$$x + y = z + u \quad \text{és} \quad 2xy = zu.$$

2010/5. Határozzuk meg azon pozitív egész n számokat, amelyekre az $S = \{1, 2, ..., n\}$ halmaz elemei színezhetők pirosra vagy kékre úgy, hogy az $S \times S \times S$ halmaz éppen 2007 olyan $(x; y; z)$ rendezett hármast tartalmaz, amelyre x, y, z azonos színűek és $n | x + y + z$.

2010/6. Az $ABCD$ érintőnégyszög A csúcsán átmenő e egyenes a BC szakaszt az M, a CD egyenest az N pontban metszi. Legyen az ABM, MNC és NDA háromszög beírt körének középpontja rendre I_1, I_2, I_3. Igazoljuk, hogy az $I_1I_2I_3$ háromszög magasságpontja az e egyenesen van.