Olimpiai válogatóversenyek feladatai 2003

2003/1. Az s_1, s_2, s_3, ... , s_{2003} nemnegatív valós számok összege 2, továbbá tudjuk, hogy $s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_4 + ... + s_{2002}s_{2003} + s_{2003}s_1 = 1$. Legyen $S = s_1^2 + s_2^2 + ... + s_{2003}^2$. Határozzuk meg az adott feltételek mellett S lehetséges legkisebb és legnagyobb értékét.

2003/2. A hegyesszögű ABC háromszög belsejében levő P pontra igaz, hogy $APB\angle = BPC\angle = CPA\angle$. A BP és CP egyenesek az AC és AB oldalakat rendre D-ben és E-ben metszik. Mutassuk meg, hogy $AB + AC \geq 4DE$.

2003/3. Egy sakk körmérkőzésen k ember vett részt és mindenki mindenkivel egyszer játszott. Miután az összes mérkőzés lezajlott kiderült, hogy bármely 4 versenyző között van olyan, aki a többi három versenyző közül egyet megvert, egytől kikapott, a harmadikkal döntetlenben egyezett meg. Legyen ilyen feltételek mellett k a lehető legnagyobb. Bizonyítsuk be, hogy $6 \leq k \leq 9$.

2003/4. Nemnegatív valós számok végtelen sorozatát jelölje a_1, a_2, ... Van olyan c szám, amelynél nincs a sorozatnak nagyobb eleme. A sorozatról még a következőt is tudjuk: $|a_i - a_j| \geq \dfrac{1}{i+j}$, minden i, j esetén, ha $i \neq j$. Igazoljuk, hogy $c \geq 1$.

2003/5. A k_1 és k_2 körök metszéspontjai P és Q. Választunk k_1-en két pontot, legyenek ezek A_1 és B_1. (A_1, B_1, P és Q négy különböző pont.) Az A_1P és B_1P egyenesek k_2-vel való, P-től különböző metszéspontjai legyenek A_2 és B_2. Legyen C az A_1B_1 és A_2B_2 egyenesek metszéspontja.

Igazoljuk, hogy A_1 és B_1 különböző választásainál az A_1A_2C háromszög köré írt kör középpontja mindig egy rögzített körön lesz.

2003/6. Pozitív egész számok véges halmazait vizsgáljuk. Egy ilyen halmaz *összegosztós*, ha a halmaz minden eleme osztója az elemek összegének.

(a) Adjunk meg egy olyan összegosztós halmazt, melynek eleme a 7 és a 17.

(b) Igazoljuk, hogy pozitív egészek egy tetszőleges véges H halmazához létezik olyan összegosztós G halmaz, hogy H részhalmaza G-nek.